Lec 11 极限连续性, 可微性习题课

11.1 高阶微分未必有形式不变性

1. 设 $y = f(x)$ 在 I 上二阶可导, 则 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) = (f'(x)\,\mathrm{d}x)'\,\mathrm{d}x = f''(x)\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x = f''(x)(\mathrm{d}x)^2$.
   此处 $\mathrm{d}x'$ 记号不是导数, 而是二阶增量.$\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}x$ 简记为 $(\mathrm{d}x)^2$, 或者 $\mathrm{d}x^2$.
   $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = f''(x)$, 当 $f(x)$ n 阶可导时, 有 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = f^{(n)}(x), n = 1, 2, 3, \cdots$.
2. 设 $y = f(x), x \in I, x = \varphi(t)$, 皆二阶可导, 则
   $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\,f(x) = \mathrm{d}\,f(\varphi(t)) = (f(\varphi(t)))'\,\mathrm{d}t = f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = f'(x)\,\mathrm{d}x$. 这是一阶形式不变性.
   $\mathrm{d}^2y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t) = (f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t)'\,\mathrm{d}t = f''(x)\,\mathrm{d}x^2 + f'(\varphi(t))\varphi''(t)\,\mathrm{d}t^2 \neq f''(x)(\mathrm{d}x)^2$. 故高阶微分未必有形式不变性.

11.2 Henie 定理及其证明

定理 11.1 (Henie 定理)

函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时有极限 l 的充分必要条件是：对于任意一个以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}(a_n \neq x_0)$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

证明 $\Leftarrow$ 设 $\{a_n\}(a_n \neq x_0)$ 是一个以 x_0 为极限的数列。因为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l,$$

故对于任意给定的正数 ε，一定存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$，所以对于上述 $\delta > 0$，存在一个自然数 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$0 < |a_n - x_0| < \delta,$$

所以当 $n > N$ 时，

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon.$$

即是

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

$\Rightarrow$ 假设当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 不以 l 为极限。那么一定有一个正数 $\varepsilon_0 > 0$，使对任意一个正

数 δ，都能找到一个 x_s，即使 $0<|x_s-x_0|<\delta$，仍有

$$|f(x_s)-l|\geq\varepsilon_0.$$

因此，取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，对应每一个这样的 n，都可找到 a_n，使

$$0<|a_n-x_0|<\delta_n=\frac{1}{n},\quad 但\quad |f(a_n)-l|\geq\varepsilon_0.$$

当 $n\to\infty$ 时，上面第一个不等式表明 $\{a_n\}(a_n\neq x_0)$ 以 x_0 为极限，而第二个不等式表明，$\{f(a_n)\}$ 不以 l 为极限。这与条件相矛盾，所以假设不成立，即有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l.\quad \square$$

该定理说明，当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的趋向性态如果在两个趋于 x_0 的点列上不一致，则 $f(x)$ 一定没有极限。

注 助教注: 也就是极限存在的时候, 可以交换极限与函数运算的次序.

11.3 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 收敛的 Cauchy 准则

定理 11.2 (Cauchy 准则)

设 $x_0\in R, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, s.t.\forall x_1,x_2\in U(x_0,\delta),|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$ ♡

注意 $f'(x_0+0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 的区别, 前者是右导数, 后者是右极限, 二者不一定相等.

例 11.1 $y=f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$, 则 $f'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 不存在, & x=0.\end{cases}$.

则 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=0, f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-0}{x-0}=\infty.$

例 11.2 $y=f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}, f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}.$

则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0.$ 而 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ 振荡发散.

11.4 Taylor 展开

定理 11.3 (Taylor 展开)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内 n 阶可导，则函数 $f(x)$ 与它在点 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式 $T_n(x)$ 之间的误差（即余项）$R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

或者说，当 $x\to x_0$ 时，

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

上述式子称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的常 Peano 余项的 Taylor 公式。♡

证明 设

$$T_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n,$$

其中系数待定，并设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内 n 阶可导。如果 $f(x)$ 与 $T_n(x)$ 的误差当 $x\to x_0$ 时是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小量

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,$$

那么就有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^k}=0,\quad k=0,1,\ldots,n,$$

以此作为出发点并利用归纳法，当 $k=0$ 时

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-T_n(x))=0,$$

由此推导出 $a_0=T_n(x_0)=f(x_0)$.

当 $k=1$ 时，利用 L'Hospital 法则则有

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(f'(x)-T_n'(x))=f'(x_0)-T_n'(x_0),$$

就得到

$$a_1=T_n'(x_0)=f'(x_0).$$

如果对于任意的 $k, 1\le k\le n$，有

$$a_0=T_n(x_0)=f(x_0),\quad \ldots,\quad a_{k-1}=T_n^{(k-1)}(x_0)=\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!},$$

那么当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)-T_n(x)$ 以及不超过 $k-1$ 的各阶导数 $f^{(i)}(x)-T_n^{(i)}(x), 1\le i\le k-1$ 都是无穷小量，因此可以连续使用 L'Hopital 法则，得

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^k},$$

即

$$a_k = \frac{T_n^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

因此，我们已经证明了满足 $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$，$x \to x_0$ 的多项式形式是

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

称上述函数 $f(x)$ 在点 x_0 的各阶导数确定的多项式 $T_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 n 次 Taylor 多项式。

11.5 极值点判断

命题 11.1

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，若 $f'(x_0)$ 在 x_0 两侧存在，异号，则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点.$f'(x_0)$ 可以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.
2. 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0(< 0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.
3. 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)} > 0(< 0)$, 则 $f(x_0)$ 必是 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

注 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f^{(3)}(x_0) \neq 0$, 则 $M_0(x_0, f(x_0))$ 为连续曲线上凹凸部分的分界点, 称为连续曲线的拐点. 在高数中称点 M_0 为连续曲线的拐点, 在数分钟称其横坐标 x_0 为函数 $f(x)$ 的拐点.

作业 复习本讲内容.